Polynome

Gegeben sei ein Ring **R** = (R, +, ·). Stellen Sie sich z.B. die ganzen oder die reellen Zahlen vor. Wir wählen ein nicht zu R gehörendes Symbol x und nennen dies "Unbestimmte" (engl. indeterminate).

Dieser in der Algebra und auch bei CAS übliche Ausdruck für Symbol soll nicht ausdrücken, daß x eine unbestimmte (d.h. veränderliche) Bedeutung habe, sondern daß x von R aus keiner "näheren Bestimmung" fähig ist.

Wir bilden mit Elementen $\alpha_i \in$ R "symbolische Ausdrücke (Terme)" folgender Art,

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$$

Polynom

Koeffizienten, Grad

Ein solcher Term heißt Polynom, α_i heißen "Koeffizienten". Ist $\alpha_n \neq 0$ (Nullelement des Ringes), so heißt n der Grad des Polynoms. Der Grad eines Polynoms ist also das größte n für das $\alpha_n \neq 0$ ist.

In der Regel schreiben wir jedoch ein Polynom als Summe mit endlich vielen Gliedern, ohne festzulegen, ab welchem Index die Koeffizienten nur noch 0 sind: $\Sigma\, \alpha_i x^i$

Definition

Die Menge aller mit dem Symbol x gebildeten Terme bezeichnen wir mit $R[x] = \{\Sigma\, \alpha_i x^i \mid \alpha_i \in R$ für alle i, endliche Summe$\}$

In R[x] wird nun eine Addition und eine Multiplikation festgelegt, und zwar so wie es die Polynome als Terme nahelegen. Es soll nämlich so sein, daß die **Substitution** der Unbestimmten x durch ein Ringelement β genau das im Sinne des Rings richtige Ergebnis liefert:

Substition

$$\alpha_0 \beta^0 + \alpha_1 \beta^1 + \alpha_2 \beta^2 + ... + \alpha_n \beta^n = \Sigma\, \alpha_i \beta^i$$

Definition Addition

Polynomaddition

Das Summenpolynom wird koeffizentenweise definiert:

$$\Sigma\, \alpha_i x^i + \Sigma\, \beta_i x^i = \Sigma\, (\alpha_i + \beta_i)\, x^i$$

Mit dieser Definition ist sofort klar, daß sich die Rechenregeln der additiven Guppe des Ringes auf R[x] übertragen. Nullelement von R[x] ist das Polynom, das nur 0 als Koeffizienten hat.

Definition Vervielfachen

Die Vervielfachung eines Polynoms $\Sigma\, \alpha_i x^i$ mit dem Ringelement β ist

$$\beta\, \Sigma\, \alpha_i x^i = \Sigma\, (\beta\alpha_i) x^i$$

Was ist das neutrale Element der Addition (Nullelement), was das neutrale Element des Vervielfachens (Einslement)?

Wir wollen jedoch auch noch versuchen die volle Multiplikation des Rings zu übertragen. Gemäß dem Ziel, daß die Substitution entsprechende Ergebnisse in R liefern soll, muß das Distributivgesetz gelten, d.h. das Produkt von Polynomen muß durch Ausmultiplizieren entstehen.

Definition Multiplikation

Das Produktpolynom ist

$$\Sigma \gamma_k x^k \text{ , wobei } \gamma_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j$$

Polynommultiplikation

Man kann leicht nachrechnen, daß die Multiplikation assoziativ ist, und daß von links und von rechts ein Distributivgesetz gilt.

Aufgabe

Bei der Multiplikation sehr langer Polynome wird es schwierig die Übersicht zu behalten. Ist n der Grad des einen und m der Grad des zweiten Polynoms, so ergeben sich n m Terme, die man dann noch bei gleicher Potenz von x zusammenfassen muss.
Entwickeln Sie eine Methode, ein Hilfsmittel, das für Sie eine Hilfe ist.

Als Test wählen Sie zuerst zwei Polynome des Grades 3. Danach zwei Polynome des Grades 4.