

Eng verwandt mit dem Aufstellen von Konstruktionstexten ist der "Two Column Proof" in der Geometrie. Diskutieren Sie auf ca. 1/2 Seite die Vor- und Nachteile dieses Beweisverfahrens. (Dass dieses Beweisverfahren nicht unumstritten ist, können Sie z.B. auch auf dieser Seite erkennen: http://mathforum.org/dr.math/faq/proof_fetter.html)

Wochenaufgabe zum Zweispaltenbeweisverfahren:

Die Übersichtlichkeit und Strukturgebundenheit dieses Beweisverfahrens erleichtert dem Leser (oder Korrektor) das Nachvollziehen des Gedankengangs ungemein. Auch hat der Beweisende auf alle Fälle einen Vorteil, da dieser step-by-step Vorgang schon einmal zu einer logischen Gedankenstruktur verhilft, die oftmals schon „die halbe Miete“ beim beweisen ist. Von Vorteil ist die Nummerierung der Schritte, wenn sich beispielsweise aus zwei vorangegangenen Feststellungen eine Folge ergibt; es reicht aus zu sagen aus Punkt 3 und Punkt 5 folgt Punkt 7. Dies erspart Schreibarbeit, was in der Mathematik stets von Vorteil ist. Schwierigkeiten ergeben sich bei diesem Beweisverfahren dann, wenn man vor der Entscheidung steht, kompliziertere Schritte, die zusammengehören (wie z.B. auch bei Konstruktionstexten) zusammenzufassen oder doch aufzusplitten. Hierbei gilt einerseits der Grundsatz, einen Beweis so zu gestalten, dass ihn auch ein Laie versteht; andererseits ihn so aufzubauen, dass er meinem Schwierigkeitsgrad sowie des, meines Gegenübers entspricht.

In der Schule ist der Einsatz dieser Methode des Beweisens denkbar sinnvoll, da den Schülern ein „Beweisgrundgerüst“ gegeben wird. Jedoch stellt sich dann wieder die Frage inwiefern in der Realschule mit Beweisen, die nicht praktischer Art sind, gearbeitet wird bzw. werden kann.

Kommentar:

„Dein Statement ist gut ausgearbeitet. Du hättest vielleicht noch auf die Problematik der (Un-) Übersichtlichkeit bei Beweisen mit Fallunterscheidungen eingehen können.“

Kommentar zu den Beweisverfahren

Insgesamt finde ich die Beweismethoden recht anschaulich. Der Vorteil bei Methode eins und zwei ist, dass sie beide übersichtlich und gut nachvollziehbar sind. Ich denke, dass die Schüler mit diesen Beweistechniken gut zurechtkommen können.

Bei Methode drei ist es viel Schreibarbeit, aber hierbei lernen die Schüler das Argumentieren und Begründen mathematischer Inhalte, indem sie ihre Sätze ausformulieren müssen.

Die erste Methode ist insgesamt denke ich am einfachsten, da das Beweisverfahren klar gegliedert und strukturiert ist und somit kein Schritt vernachlässigt werden kann, da jeder auch begründet werden muss.

Das schematische Schaubild in Methode zwei ist meiner Meinung nach logisch, aber das schriftliche Argumentieren und Begründen fällt hierbei weg, da durch die Pfeile die Schlussfolgerungen schon gegeben werden.

Der Nachteil bei Methode drei ist, dass wenn die Schüler mit dieser Beweistechnik noch nicht so vertraut sind, sie einzelne Schritte oder auch die dazugehörigen Begründungen vergessen können. Ich denke bei dieser Beweisführung müssen die Schüler in der Lage sein, mathematisch gut und sorgfältig zu argumentieren.

Kommentar:

„Du hast jeweils die Schwierigkeiten und „Chancen“ der einzelnen Beweisverfahren gut herausgearbeitet.

Nur die Aussage, dass bei Methode 2 schriftliches Argumentieren und Begründen wegfällt, verstehe ich nicht ganz. Es wird doch hierbei auch begründet (unter den „Kästen“), oder was meinst du damit?

Two-Column Proof

Beim two-column proof werden die Behauptung und die zugehörige Begründung in zwei Spalten einander gegenübergestellt. Durch diese Darstellungsform ist dieses Beweisverfahren zum einen sehr übersichtlich. Zum anderen wird jede Behauptung sofort begründet, da durch die Darstellungsart eine fehlende Begründung sofort auffällt.

Dieses Beweisverfahren verwendet ein ähnliches Schema, wie die Konstruktionstexte. Bei diesen werden Zeile für Zeile Punkte etc. genannt und gleichzeitig durch eine Konstruktionsanweisung erklärt, wie man diesen Punkt erhält. Somit bietet es sich an die Arbeit mit Konstruktionstexten als Vorarbeit für Beweisverfahren zu nutzen. Durch ein entsprechendes Aufziehen der Konstruktionstexte, evtl. auch in zwei Spalten kann dieses Schema auf Behauptung und Begründung übertragen werden. Somit kennen die Schüler bereits das Schema und die Arbeit damit.

Das Schema kann den Schülern bei der Beweisführung auch Halt geben, der es ihnen erleichtert mit dem „Schreckgespenst“ Beweis umzugehen.

Der two-column proof verläuft linear, das bedeutet, dass er nicht die Möglichkeit bietet Fallunterscheidungen zu beachten ohne an Übersichtlichkeit zu verlieren und diese auch gar nicht vorsieht.

Außerdem erlaubt er es den Schülern alles kurz und knapp zu formulieren, was aus mathematischer Sicht nicht schlecht ist. Jedoch könnte es dann zu Schwierigkeiten kommen einen Beweis in ganzen Sätzen zu führen. Dies würde andererseits aber auch wieder die Möglichkeit bieten, das „Übersetzen“ der knappen mathematischen Sprache zu üben.

Kommentar:

„Sehr gut an deinem Kommentar hat mir gefallen, dass du auch schon berücksichtigt hast, wie unübersichtlich der Aufschrieb bei einem Beweis mit Fallunterscheidung wird bzw. werden kann.“

The Two-Column Proof

Für mich ist der Two-Column Proof sehr überschaubar aufgebaut. Eine Spalte mit den einzelnen Schritten Aussagen, daneben die Begründungen. Zusätzlich noch durchnummeriert, dass auch bei evtl. ungleichmäßiger Blatteinteilung der Schüler keine Verwechslungen entstehen. Somit kann der Schüler beim Lernen nochmals nachvollziehen, was gemacht wurde.

Bei dieser Methode lernt der Schüler Inhalte in mathematischer Schreibweise auszudrücken. Bei häufigem Umgang wird so einfacher, weil man schneller sehen kann, worum es geht. Durch die kurzen Begründungen ist der Schüler verpflichtet, sich auf das Wesentliche zu beschränken.

Die Gefahr bei dieser Methode ist, dass der Schüler nicht mit dieser `Sprache` umgehen kann, wenn sie zu selten angewandt wird. Der Beweis ist vermutlich mit etwas Überlegungen nachvollziehbar, bringt aber keine Vorteile durch die kurze Schreibweise. Ein anderes Problem könnte sein, dass die Schüler nicht in der Lage sind, zu beschreiben, was der Beweis genau bedeutet. Deshalb gehört immer dazu, dass man im nochmals erklären lässt und konkret wird. Ähnlich wie The Paragraph Proof, nur in mündlicher Form.

Kommentar:

„Du hast sicherlich Recht wenn du sagst, Schüler könnten Probleme mit der „Sprache“ haben, weil die Kurzschreibweise den meisten Schülern noch nicht so geläufig sein dürfte. Deshalb sollte man die Schüler vorher schon im Unterricht (zumindest teilweise) an diese Schreibweise gewöhnen.“

Diskussion zum Zweispaltenbeweises „The Two-Column Proof“

Ich muss sagen, dass mir dieses Zweispaltenbeweisverfahren „The Two-Column Proof“ sehr gut gefällt, da es sehr übersichtlich gestaltet ist. In der 1. Spalte stehen mathematische Fakten, in der 2. Spalte die entsprechende Begründung bzw. Erläuterung dazu. Jederzeit ist dies für den Leser nachvollziehbar und verständlich. Diese zwei Spaltenaufgliederung finde ich sogar effizienter wie wir es gewohnt sind. Üblicherweise halten wir uns ja auch an eine sehr kurze gängige mathematische Ausdrucksweise, die durch entsprechende Nummerierung übersichtlich ist. Das Zweispaltenbeweisverfahren strukturiert das Vorgehen aber besser, was auch leistungsschwächeren Schüler sehr zu Gute kommt. Man sollte dieses Vorgehen auf jeden Fall in der Schule zum Einsatz bringen. Nachteile sind für mich nicht erkennbar.

Das zweite Beweisschema „The Flow Proof“ gefällt mir auch sehr gut. Verlangt aber schon ein großes Abstraktionsvermögen und bleibt daher eher für den leistungsstärkeren Schüler vorbehalten.

Der dritte Beweis „The Paragraph Proof“ ist sicher der einfachste von den drei vorgestellten Beweisen. Allerdings leidet er durch die ausführliche und detaillierte Ausdrucksweise an Übersichtlichkeit, was in der Mathematik aber eine wichtige Rolle spielt.

Kommentar:

„Du bist schon auf die beiden Spalten in dem Beweis eingegangen und hast ihn gut erklärt und dargestellt.“

The Two-Column Proof

Meiner Meinung nach ist der erste Beweis der übersichtlichste und der am einfachsten nachvollziehbare Beweis, den ich auch am ehesten in der Schule anwenden würde. Hier können die Schüler jeden Schritt in der Spalte mit den Begründungen erkennen. Auch einen Vorteil in diesem Beweis sehe ich in der mathematischen Kurzschreibweise im Gegensatz zum dritten Beweis, der durch die langen Textabschnitte für die Schüler unübersichtlich und langwierig zum durchführen ist. Ich denke auch, dass durch diese Darstellung einzelne Schritte schnell vergessen werden können, was durch die Form des „Zwei-Spalten-Beweises“ kaum möglich ist.

Bei der zweiten Methode liegt das Hauptproblem meines Erachtens an der schematischen Darstellung, mit der die Schüler wahrscheinlich nicht vertraut sind und vielleicht Probleme mit der Wiedergabe des mathematischen Inhalts haben könnten. Grundsätzlich finde ich aber diese Beweisform für die Schule schon angemessen, es bedarf eben, denke ich, an ausführlichen Erklärungen des Aufbaus einer solchen schematischen Darstellung.

Kommentar:

„Du hast die wesentlichen Gesichtspunkte recht prägnant erläutert. Du hättest vielleicht noch genauer auf die anderen beiden Beweisarten eingehen können (wo die Probleme liegen hast du ja erwähnt, aber welche Möglichkeiten oder Chancen bieten sie?).“

Vorteile und Nachteile des „Two-Column Proof“

Mein erster Gedanke war, dass der Zwei-Spalten Beweis übersichtlich dargestellt ist, was ich als Vorteil sehe. Man kann links die einzelnen Schritte verfolgen und rechts die jeweilige Begründung dazu lesen. So ist der Beweis auch leicht zu überfliegen.

Aus der Übersichtlichkeit der Spalten resultiert jedoch auch ein entscheidender Nachteil: die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Schritten sind nicht auf einen Blick sichtbar. Ich „hantiere“ bei Beweisen gern mit Folgepfeilen oder ähnlichem um zu signalisieren, dass z. B. aus drei einzelnen Angaben ein Ergebnis folgt. Diese Anschaulichkeit fehlt im Zwei-Spalten Beweis, was ich einen beträchtlichen Nachteil finde.

Einen weiteren Vorteil sehe ich auch in der Spalte mit den Gründen. Man ist so gezwungen, zu jedem Beweisschritt einen Grund anzugeben. Man kann dort keine Zeile leer lassen. Außerdem kann es einem dadurch nicht passieren, dass man eine Begründung vergisst. Allerdings schützt es auch nicht vor falschen Begründungen.

Kommentar:

„Du hast die wesentlichen Gesichtspunkte recht prägnant erläutert. Du hättest vielleicht noch genauer auf die anderen beiden Beweisarten eingehen können (wo die Probleme liegen hast du ja erwähnt, aber welche Möglichkeiten oder Chancen bieten sie?).“

Kommentar zu den Beweisverfahren

Die erste Methode ist meiner Meinung nach das beste Beweisverfahren, da es übersichtlich und klar gegliedert ist. Die gegebenen Angaben werden kurz und prägnant dargelegt und durch einzelne Definitionen und Sätze begründet. Dadurch kann jeder Schüler das Beweisverfahren schrittweise durchgehen und mit den Begründungen können die einzelnen Schritte nachvollzogen werden.

Bei der zweiten Methode finde ich die Darstellung recht anschaulich, aber nicht ganz einfach wiederzugeben. Solche schematischen Schaubilder sind durch die Boxen und Pfeile zwar übersichtlich strukturiert, müssen aber hinsichtlich der Form gut durchdacht sein. Den Schülern ist diese Methode wahrscheinlich auch nicht so geläufig und muss zu Beginn des Beweises kurz erläutert werden. Das schematische Aufbauen eines solchen Beweises ist nach mehrmaligem Ausprobieren recht gut anzuwenden und den Schülern bleibt die Schreiarbeit erspart. Jedoch wird das Ausformulieren von mathematischen Inhalten etwas vernachlässigt, da durch die Pfeile Schlussfolgerungen nicht mehr beschrieben werden müssen.

Die letzte Methode beweist zwar die Behauptung, aber ist für Schüler denke ich zu langwierig und wird durch die langen Sätze viel zu kompliziert. Außerdem können Schritte schnell vernachlässigt werden, da einzelne Begründungen als nicht so wichtig angesehen werden können. Im Gegensatz zu Methode zwei wird hierbei das Begründen mathematischer Schritte geübt und die Schüler müssen lernen ihre Argumente sorgfältig zu formulieren.

Kommentar:

„Dein Kommentar hat mir sehr gut gefallen. Du bist auf jeden Aspekt eingegangen. Und im Ganzen hast du deinen Standpunkt gut klar gemacht. Du hättest vielleicht noch auf die Problematik der (Un-) Übersichtlichkeit bei Beweisen mit Fallunterscheidungen eingehen können.““

Der „Two-Column Proof“ ist vergleichbar mit den uns bekannten Konstruktionstexten, denn in diesen wird durch eine Konstruktionsanweisung erläutert, was gemacht wurde und daneben gleich dargestellt, was daraus resultiert, wie z. B. ein neuer Schnittpunkt o. ä..

Genau diese Zweiteilung findet man auch bei dem „Two-Column Proof“ wieder. Das Beweisverfahren ist in zwei Spalten gegliedert, wobei in der ersten Spalte die Behauptungen und in der zweiten Spalte die jeweiligen Begründungen dargestellt sind. Dadurch erhält man eine sehr gute Übersicht den ganzen Beweis hindurch.

Durch solch eine übersichtliche Darstellung ist es jedem auch nachträglich noch möglich den Beweis nachzuvollziehen (wie auch bei den Konstruktionstexten). Würde ein Schritt fehlen oder eine Behauptung nicht begründet sein, würde dies sofort auffallen. Dies wird durch die Nummerierung der jeweiligen Behauptungen und Begründungen unterstützt. Somit haben beide, der Schüler, der den Beweis durchführt, und der Lehrer, der den Beweis zu kontrollieren hat, eine Kontrolle.

Weiter stellt der „Two-Column Proof“ ein Beweisverfahren dar, das den Schülern ein spezielles Raster vorgibt, an das sie sich halten können. Den gesamten Beweis hindurch können die Schüler alles kurz und mathematisch darstellen, dies ist hier auch sinnvoll. Jedoch besteht die Gefahr, dass die Schüler sich sonst auch nur noch mathematisch ausdrücken und nicht mehr „normal“, oder dass andere Personen, die eventuell zu kurz dargestellten mathematischen Behauptungen und Begründungen, nicht mehr „übersetzen“ und nachvollziehen können.

Kommentar:

„Du bist schon auf die beiden Spalten in dem Beweis eingegangen und hast ihn gut erklärt und dargestellt.“

Auf den ersten Blick fallen mir zu dem Two-Column Proof nur Vorteile ein. Durch die zwei Spalten ist der Beweis sehr übersichtlich und einfach gegliedert.

In der ersten Spalte stehen die mathematischen Fakten und in der zweiten die dazugehörigen Begründungen bzw. Erklärungen.

Zudem sind die Spalten noch durch imaginäre Zeilen (durch die Nummerierung) eindeutig miteinander verknüpft, was den Zusammenhang klar ersichtlich macht.

Verglichen mit dem Paragraph Proof, den ich in meiner bisherigen Laufbahn eigentlich hauptsächlich zu Gesicht bekommen habe, finde ich den Two-Column Proof um Welten anschaulicher. Der Paragraph Proof enthält viel zu viel Text. Dieser Text mag vielleicht Inhaltlich besser sein, schreckt jedoch durch seinen Umfang ab, zudem ist er durch die nicht vorhandene Strukturierung sehr schwer eingängig.

Der Flow Proof gefällt mir persönlich sogar noch besser. Er ist einfach verständlich und medial sehr gut dargestellt (Folgepfeile mit den dazugehörigen Informationen zwischen den einzelnen Elementen). Der einzige Nachteil ist, dass man den Aufbau erst einmal genau erläutern muss (doch das sollte man ja eigentlich immer tun oder?). Danach kann man diese Form des Beweisverfahrens problemlos einsetzen. Alle Fakten stehen in klarem Zusammenhang miteinander. Falls Erklärungen notwendig sind stehen diese an den dazugehörigen Folgepfeilen.

Der Flow Proof und der Two-Column Proof haben meiner Meinung nach nur einen Nachteil sie könnten bei längeren Beweisen oder Beweisketten relativ unübersichtlich werden. Die muss jedoch nicht der Fall sein.

Ich persönlich würde den Flow Proof dem Two-Column Proof vorziehen.

Diesen jedoch jederzeit zu gegebenem Anlass einsetzen .

Kommentar:

„Du bist schon auf die beiden Spalten in dem Beweis eingegangen und hast ihn gut erklärt und dargestellt.“

Prinzipiell gefällt mir die Beweismethode. Sie ist durch die beiden Spalten durchaus übersichtlich, wobei mir der ‚Flow Proof‘ als übersichtlicher erscheint. In der Mathematik muss man die Struktur von etwas verstehen. Das Problem ist dabei oft, dass wir es gewohnt sind, linear etwas zu Papier zu bringen. Der ‚Paragraph Proof‘ ist dabei ein typisches Beispiel, aber auch der ‚Two-Column Proof‘ ist linear. Eine Struktur darzustellen ist zugegeben oft schwierig und zumindest ich kann nicht behaupten in meiner Schullaufbahn ein vernetztes DARSTELLEN (z.B. Concept-Maps) erlernt zu haben. Ich bedaure das zwar, aber dennoch ist es unumstritten nicht unmöglich, aus linearen Auflistungen eine mentale Struktur aufzubauen. Dies gelingt einem auf jeden Fall wiederum besser mit dem ‚Two-Column Proof‘ als mit dem ‚Paragraph Proof‘. Solange sich der Beweis nicht aus vielen komplizierten verzweigten Einzelwegen zusammensetzt ist die Beweisstruktur des ‚Two-Column Proof‘ sicherlich geeignet.

Was mir besonders an dem Beweis gefällt ist der Gegenüberstellung von mathematischen Symbolen und der zugehörigen Erklärungen. Auch wenn sich die Variablen in einem anderen Fall einmal verändern, die zugrundeliegenden Gesetze bleiben bestehen. Oft wissen Schüler nicht, wie sie vorgehen und argumentieren sollen. Durch ein einheitliches ‚Standardsystem‘ fällt ihnen das wesentlich einfacher.

Kommentar:

„Du bist schon auf die beiden Spalten in dem Beweis eingegangen und hast ihn gut erklärt und dargestellt.“